

Geometria Dinâmica: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do *software Tabulae*

George de Souza Alves¹, Adriana Benevides Soares²

¹Instituto de Matemática e Núcleo de Computação Eletrônica – Universidade Federal do Rio de Janeiro / Fundação de Apoio à Escola Técnica – RJ

²Instituto de Psicologia – Universidade Gama Filho / Núcleo de Computação Eletrônica – Universidade Federal do Rio de Janeiro

georgesa@posgrad.nce.ufrj.br, gildam@unisys.com.br

Abstract. *The introduction of dynamic geometry software's potencialities and limitations was the main aim of this study. It was made a description of how these softwares allow an exact and different constructions of geometric objects, collaborating for visualisation process and stimulating the discovery and the exploration. The pupils can make conjectures and formulate and refine their assumptions, understanding the importance of the proof of geometric propositions. Therefore, it was investigated the relations between these softwares utilisation and the intuitive and logical aspects of teaching-learning process in geometry. Tabulae was the software used in this investigation, it was developped at IM/UFRJ.*

Resumo. *O objetivo central deste estudo foi apresentar os principais recursos, potencialidades e limitações dos softwares de geometria dinâmica. Foi feita uma descrição de como estes softwares permitem uma variada e precisa construção de objetos geométricos, contribuindo para o processo de visualização e estimulando a exploração e a descoberta. Os alunos podem fazer conjecturas e formular e refinar hipóteses, compreendendo a importância da demonstração de proposições geométricas. Portanto, procurou-se investigar as relações existentes entre a utilização destes softwares e a consideração dos aspectos intuitivo e lógico na aprendizagem geométrica. O programa utilizado para a investigação foi o Tabulae, desenvolvido no IM/UFRJ.*

1. Introdução

A tecnologia informática tem se tornado tão presente em nosso cotidiano que o uso do computador tem adquirido importância cada vez maior no dia-a-dia das escolas e no desenvolvimento do processo ensino-aprendizagem. Alguns se perguntam, então, se esta presença crescente do computador em diversas atividades de nossas vidas e, principalmente na escola, pode gerar uma revolução na educação.

A temática deste *Workshop em Informática na Educação – versão 2003* pode indicar um caminho em busca de uma resposta: *Tecnologia & Educação para Todos*. A expressão “**para todos**” deste tema mostra a importância da difusão e acesso desta

tecnologia para um número crescente de pessoas, além de ressaltar a participação do elemento humano no processo de mudança de paradigmas na educação.

Diversos estudiosos constataram que a inserção de tecnologia informática contribui para a expansão das formas habituais de utilização de recursos materiais no trabalho dos professores em sala de aula. Mesmo que o computador seja inicialmente um problema a mais na vida do professor, ele acaba criando novas possibilidades para o seu desenvolvimento como profissional.

Além disso, o bom uso deste recurso em sala de aula tem trazido uma motivação a mais para os alunos.

Este estudo busca prestar uma contribuição para a temática apresentada, se preocupando em analisar os recursos, potencialidades e limitações dos programas de geometria dinâmica disponíveis no mercado brasileiro. A partir da análise de algumas características é possível perceber como a utilização da tecnologia, através da geometria dinâmica, pode colaborar para a superação de inúmeras dificuldades encontradas no processo de ensino-aprendizagem da geometria euclidiana, resgatando dois aspectos tão esquecidos quanto importantes no ensino da matemática: o intuitivo e o lógico.

O programa utilizado para a investigação foi o *Tabulae*, desenvolvido no Instituto de Matemática da UFRJ.

2. O Software *Tabulae*

O nome *Tabulae* era dado ao conjunto de tábuas de cera que os antigos gregos e romanos usavam para rabiscar mensagens e diagramas (Belfort 2001; Guimarães, 2001).

As principais razões para a execução e desenvolvimento do programa foram as considerações de custo e de disponibilidade para os professores que se formam nos cursos de licenciatura plena em matemática e de especialização para professores (Belfort, 2001). Normalmente os *softwares* de geometria dinâmica disponíveis no mercado apresentam alto custo para o professor e normalmente ainda não dispõem de recurso para a comunicação via internet.

O desenvolvimento deste *software* fez parte do projeto PACE – Pesquisa em Ambientes Computacionais de Ensino, também responsável pelo desenvolvimento de outros materiais voltados para a criação de ambientes colaborativos de aprendizagem via internet.

Ele está inteiramente escrito na linguagem Java e por este motivo apresenta a facilidade de ser compatível com diferentes sistemas operacionais, tais como *Windows*, *Linux* e *Macintosh*. Como sua concepção é inteiramente orientada a objeto, é possível adicionar novas ferramentas sem a necessidade de reiniciar seu processo de montagem (Belfort, 2001; Guimarães, 2001).

O *Tabulae* permite gerar *applets* que podem ser usados como ferramenta de autoria para redes locais e através da internet. Um usuário pode fazer uma construção geométrica e enviar para outro(s), cujos computadores estejam conectados à rede (Guimarães, 2001).

Através deste programa, é possível que professores e/ou pesquisadores acompanhem passo-a-passo o trabalho de cada aluno individualmente ou em pequenos

grupos, possibilitando que tais registros sejam utilizados para avaliações ou para pesquisas sobre a diversidade de soluções apresentadas (uma forma de investigar as diferentes representações do conhecimento).

A listagem, gerada pelo programa em linguagem HTML, contém todas as atividades desenvolvidas pelo estudante durante o processo de investigação de um problema, incluindo as etapas da construção realizada pelo aluno e a indicação do tempo gasto por ele para finalizar cada uma delas.

De acordo com Belfort (2001), o *design* da interface gráfica envolveu, além dos aspectos estéticos e tecnológicos, elementos que pudessem interferir na comunicação ou apreensão da informação apresentada. Assim, foram levados em consideração no *design*, os aspectos perceptuais, cognitivos e de interação homem-máquina. Também foram mantidas determinadas normas e um vocabulário simples que permitisse que o usuário tivesse familiaridade com conceitos já conhecidos e pudesse aprender com facilidade os novos.

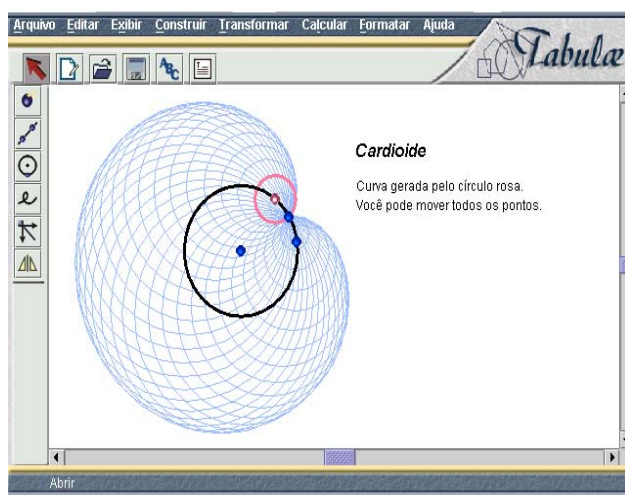


Figura 1: Tela do *Tabulæ*

3. A Aprendizagem da Geometria e os *Softwares* Geométricos

De todos os tópicos presentes nos currículos da matemática escolar, a geometria é o que tem experimentado as maiores e mais profundas transformações com a utilização da tecnologia informática; devido, principalmente, ao desenvolvimento de *softwares* específicos voltados para o seu processo de ensino-aprendizagem.

Alguns educadores matemáticos (Lorenzato, 1995; Laborde, 1998; Fainguelernt, 1999; entre outros) têm apontado dois importantes aspectos no processo de ensino-aprendizagem da geometria: o intuitivo e o lógico. O primeiro deles se refere ao estudo do espaço e das relações espaciais e o segundo está relacionado ao raciocínio dedutivo e à compreensão e domínio de sistemas axiomáticos.

Para Laborde (1998) há um consenso entre educadores matemáticos que o uso do computador no ensino de geometria pode contribuir para a visualização geométrica (aspecto intuitivo).

Os conceitos de **visualizar** e **visualização** adquirem, então, grande importância para o ensino desta disciplina, especialmente quando se utiliza o computador. Em educação matemática, visualizar é formar ou conceber uma imagem visual de algo que não se tem ante os olhos no momento.

Van Hiele (1986) considera que a visualização tem uma importância vital no processo de construção do conhecimento. Segundo este autor a representação mental dos objetos geométricos, a análise e a organização formal (síntese) das propriedades geométricas relativas a um conceito geométrico são passos preparatórios para o entendimento da formalização de um conceito.

Contudo há controvérsias sobre como a visualização se forma em nossa mente. O que não é razão para que este processo não ocupe seu lugar de destaque no ensino da geometria, uma vez que esta habilidade pode ser desenvolvida, desde que estejam disponíveis para o aluno materiais de apoio didático baseados em materiais concretos representativos do objeto geométrico em estudo (Kaleff, 1998).

Em alguns casos o computador também pode ser visto como uma espécie de material concreto. O seu uso apropriado pode tornar o ensino da matemática muito mais eficiente, integrado e significativo, além de elucidar a relação que esta ciência tem com outras disciplinas.

Através dos recursos de animação de alguns *softwares* geométricos, o aluno pode construir, mover e observar de vários ângulos as figuras geométricas, além de modificar algumas de suas características. Há desenhos de execução bastante complicada e até mesmo impossível com as tecnologias tradicionais (papel e lápis e quadro e giz, por exemplo) e que se tornam facilmente exequíveis com o uso do computador.

Com relação ao aspecto lógico, alguns estudiosos acreditam que o computador acaba criando obstáculos no caminho da visualização para a prova formal em geometria. Para eles, a evidência visual e os outros instrumentos de validação disponíveis podem tornar este procedimento desnecessário para o convencimento e até mesmo para o entendimento do aluno.

Por outro lado, outros defendem que a visualização pode ajudar nas demonstrações desde que o professor seja hábil para propor problemas e estratégias.

A prova pode ser tratada informalmente e de uma maneira menos rigorosa no ensino fundamental. Neste nível, o aluno deve ser encorajado a testar e refinar hipóteses para se convencer das proposições e dos resultados geométricos e o computador faz a ligação entre os experimentos e o raciocínio dedutivo, proporcionando ao aluno a oportunidade de compreender uma prova rigorosa num nível de ensino mais elevado.

4. Geometria Dinâmica: recursos, potencialidades e limitações

O termo geometria dinâmica foi inicialmente usado por Nick Jakiw e Steve Rasmussen da *Key Curriculum Press, Inc.* com o objetivo de diferenciar este tipo de *software* dos demais *softwares* geométricos. Comumente ele é utilizado para designar programas interativos que permitem a criação e manipulação de figuras geométricas a partir de suas propriedades, não devendo ser visto como referência a uma nova geometria.

O desenvolvimento destes *softwares* foi proporcionado pelos avanços nos recursos disponíveis no *hardware* dos computadores pessoais. Eles apareceram a partir do crescimento na capacidade de memória e na velocidade de processamento das informações dos microcomputadores, além do surgimento do *mouse* como meio de comunicação do usuário com a interface gráfica.

Além de serem importantes ferramentas para o ensino da geometria euclidiana, estes *softwares* também costumam ser usados em pesquisas e em outras áreas da geometria, como as geometrias não-euclidianas, geometria analítica e geometria descritiva, assim como podem ser explorados em outras áreas como a física, por exemplo.

Por realizarem as construções que podem ser feitas com régua e compasso, algumas pessoas referem-se aos programas de geometria dinâmica como “régua e compasso eletrônicos”.

4.1. Recursos

Ao abrir qualquer programa de geometria dinâmica, o usuário se depara com uma tela em branco e uma grande gama de recursos que possibilitam que ele caminhe em direção à construção do seu conhecimento em qualquer uma das áreas já mencionadas.

Estes recursos podem ser desde o uso de **cores** nos desenhos até a existência de uma **calculadora interna** e a possibilidade de medição de ângulos, distâncias e áreas, ocorrendo a atualização dos valores em tempo real a partir da movimentação da figura.

Se um determinado problema requer o uso de sistemas de coordenadas, estes *softwares* disponibilizam tanto as **coordenadas cartesianas** quanto as **polares**, porém alguns deles são visualmente mais detalhados e mais fáceis de manipular que outros.

Uma outra possibilidade para o usuário é a criação e arquivamento de construções que podem ser utilizadas numa outra situação, através de **macro-construções ou scripts**.

Há recursos que devem ser destacados separadamente, por serem responsáveis pela diferenciação destes *softwares* dos demais relacionados ao ensino da Geometria.

O **arrastar** talvez seja o principal entre todos. Através do *mouse* é possível clicar sobre um ponto do objeto geométrico construído e depois arrastá-lo pela tela, criando um movimento que provoca uma mudança na configuração. A questão sobre **o que** se pode arrastar e sobre **por que** arrastar permite a diferenciação entre construir uma figura ou simplesmente desenhá-la. Quando constrói uma figura, o usuário não pode fazer apenas uma aproximação e sim ter a clareza sobre as relações entre os diferentes elementos da figura, senão ela não mantém seu formato original ao ser arrastada. A figura 2 mostra o que ocorre a um retângulo desenhado sem a utilização de suas propriedades quando um de seus vértices é arrastado.

Por outro lado, quando o usuário utiliza corretamente as propriedades geométricas na construção, a dinâmica dos movimentos possibilita que ele perceba o que permanece invariante, alertando-o para determinados padrões e motivando-o a fazer conjecturas e a testar suas convicções. O paralelismo, a ortogonalidade, a proporcionalidade, a simetria axial, a simetria pontual (rotação de 180^0) e a incidência são os chamados invariantes geométricos.

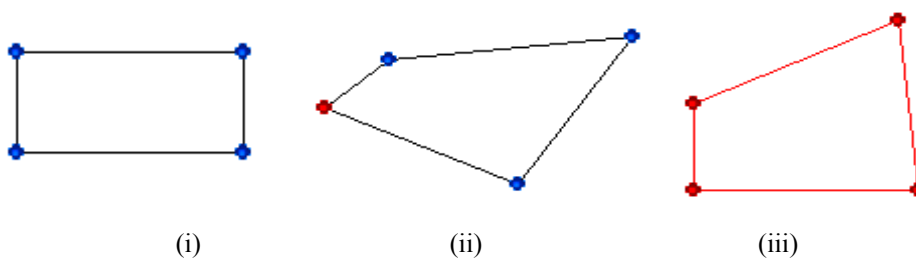


Figura 2: Exemplo de retângulo mal construído (i), após o arrastar do *mouse* podem ser gerados os trapézios (ii) e (iii)

Uma outra importante característica destes programas é a possibilidade de **supressão de elementos que não interessam** na construção. Um exemplo em que se utiliza este recurso pode ser da própria construção do retângulo através de suas propriedades: só é possível no Tabulae, por exemplo, utilizar a condição dos lados serem perpendiculares, usando retas e não segmentos, isto é, a partir da função <CONSTRUIR> \Rightarrow <RETAS> \Rightarrow <RETAS PERPENDICULARES>. Em cima da figura construída desenham-se os segmentos de reta que representam os lados do retângulo, com a função <CONSTRUIR> \Rightarrow <SEGMENTO DE RETA> e depois as retas devem ser omitidas, selecionando-as e usando a função <EXIBIR> \Rightarrow <ESCONDER OBJETO>. A figura 3 ilustra a situação descrita.

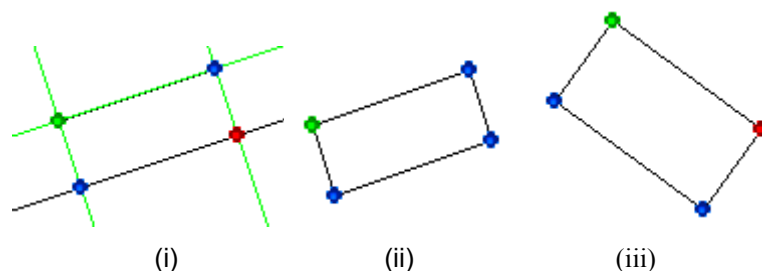


Figura 3: Retângulo construído sobre retas utilizando as suas propriedades (i), retângulo com as retas ocultas (ii) e retângulo obtido após uma movimentação do *mouse*(iii)

Versões mais atualizadas de alguns destes programas dispõem de comandos de **traço** ou **rastro** que possibilitam a visualização ponto a ponto da trajetória de um objeto escolhido. Além disso, é possível a **animação** de figuras, permitindo a **simulação** de situações físicas, tais como o funcionamento de motores e engrenagens, ou de funções periódicas da Matemática, tais como as funções trigonométricas.

Estes *softwares* também permitem a realização de várias **transformações geométricas**, tais como simetria, reflexão, rotação, translação e homotetia (ampliação e redução).

A construção de lugares geométricos ou *locus* num ambiente computacional ocorre segundo uma abordagem informal, baseada na trajetória de um objeto em função de um caminho conhecido que outro objeto percorre (Belfort, 2001).

Belfort (2001) ressalta que este é um dos recursos mais notáveis da Geometria Dinâmica, pois caso o usuário precisasse usar recursos gráficos tradicionais do desenho geométrico, um determinado procedimento deveria ser repetido tantas vezes quantas fossem necessárias para obter uma amostra de pontos do lugar geométrico que reproduzisse um comportamento satisfatório. Enquanto isso, estes programas geram

automaticamente uma amostra com um número n de pontos que representam posições possíveis da trajetória do *locus* considerado.

Nesta seção foram considerados alguns recursos bastante importantes dos *softwares* geométricos situados no que se convencionou a chamar de Geometria Dinâmica. Os recursos foram apresentados em linhas bem gerais e são representativos das possibilidades e avanços para a aprendizagem da Geometria, porém ainda há outros que certamente ampliariam a discussão aqui apresentada. Por razões de concisão estes últimos foram omitidos.

4.2. Potencialidades

As potencialidades dos *softwares* de geometria dinâmica, aqui indicadas, são algumas de suas mais importantes características que ajudam a enriquecer o processo de ensino-aprendizagem da geometria, além de valorizar o conhecimento matemático e a sua construção, através das ações de experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e demonstrar.

Cada uma destas características está fortemente relacionada às demais, porém elas são apresentadas separadamente com o objetivo de tornar mais inteligível a sua importância.

(A) Precisão e variedade na construção de objetos geométricos

Um argumento lógico pode oscilar de acordo com que os olhos vêem numa configuração geométrica. Daí a importância da construção de desenhos corretos e precisos e da variedade de construções de uma mesma configuração para a aprendizagem e pesquisa da geometria.

Fischbein (1993), em sua teoria dos conceitos figurais, afirmava que os objetos geométricos se constituem de duas componentes: a conceitual e a figural.

A componente conceitual expressa as propriedades que caracterizam uma certa classe de objetos, através de linguagem escrita ou falada e, num maior ou menor grau de formalismo, conforme o nível de axiomatização considerado.

A componente figural é a imagem ou representação mental associada ao conceito (visualização), com movimentos de translação, rotação etc., mantendo invariantes certas relações.

O equilíbrio e a harmonia entre estas duas componentes determinam a noção correta sobre o objeto geométrico (Gravina, 1996). Portanto, o desenho bem realizado adquire grande importância para a obtenção desta harmonia, já que ele é um suporte concreto de expressão e entendimento do objeto geométrico e possui um papel importante na formação de sua imagem mental.

Um aspecto bastante importante é que a possibilidade de construções precisas e variadas, proporcionadas pela geometria dinâmica, permite que representações contingentes (os desenhos prototípicos, por exemplo) não sejam confundidas com as propriedades matemáticas que determinam a configuração geométrica.

Gravina (1996) realizou um estudo com alunos ingressantes no curso de licenciatura em matemática da UFRGS, onde solicitou que eles traçassem as alturas dos triângulos representados na figura 4, relativamente aos lados destacados.

Os resultados mostraram 90% , 17% e 49% de acertos respectivamente em relação aos triângulos (i), (ii) e (iii), evidenciando um desequilíbrio entre componentes conceitual e figural do objeto geométrico, uma vez que a altura do triângulo é um típico exemplo da influência do desenho prototípico, sendo normalmente identificada como o segmento que tem extremidades no lado “base” e no vértice oposto a esta base, estando este segmento sempre no interior do triângulo (Gravina, 1996).

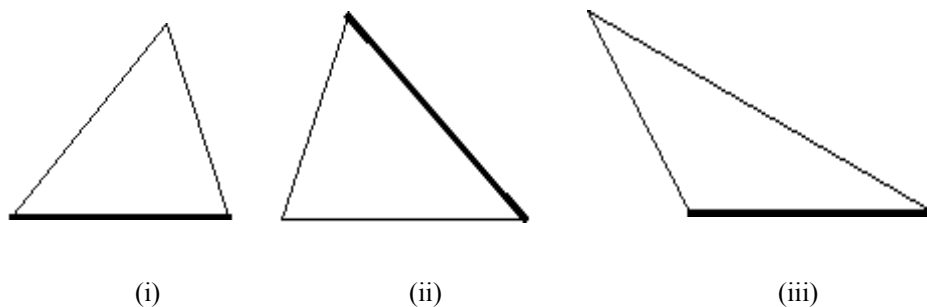


Figura 4: Triângulos a partir dos quais foram traçadas as alturas relativas aos lados destacados

Estes resultados podem ser o reflexo das dificuldades decorrentes do aspecto estático do desenho e da opção pela representação prototípica encontrada normalmente nos livros didáticos de matemática.

Com o “arrastar” as particularidades contingentes de uma configuração geométrica mudam, possibilitando uma grande variedade de representações e permitindo a observação das propriedades geométricas invariantes. Deste modo fica possível estabelecer a harmonia entre os aspectos conceitual e figural.

Estas questões mostram como a geometria dinâmica pode colaborar para os processos de formação do conceito de objeto geométrico, permitindo que o aluno não confunda as propriedades de um desenho com as propriedades de um objeto geométrico, ou seja, a posição particular de um desenho não faz parte das características do objeto geométrico considerado.

(B) Exploração e descoberta

O trabalho com a geometria dinâmica possibilita duas maneiras diferentes de utilização: **atividades de expressão** ou **atividades de exploração**, também chamada de **caixa preta** (Gravina, 1996; Laborde, 1998).

As **atividades de expressão** proporcionam ao aluno a autonomia para construir seus próprios modelos, visando o domínio dos conceitos relacionados à configuração geométrica necessários para sua construção. Nas **atividades de exploração** os alunos recebem as construções prontas e são desafiados a compreendê-las.

Nas duas situações, com a figura construída, o estudante pode movimentar os pontos de base e verificar algumas propriedades através da observação dos invariantes geométricos.

Através da experimentação, **exploração** e análise das propriedades das figuras geométricas, ocorre um estímulo ao raciocínio e o favorecimento da **descoberta** de novas relações e conceitos geométricos.

Ambos os casos são baseados numa interação entre a visualização e o conhecimento de conceitos e propriedades. Novamente aparecem os aspectos intuitivo e lógico da aprendizagem da geometria.

(C) Visualização ou Representação Mental de Objetos Geométricos

Anteriormente foi mencionada a importância da visualização para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Procura-se aqui refletir sobre as possíveis contribuições da geometria dinâmica a este processo.

Laborde (1998) observou adultos com conhecimento de geometria que tentavam resolver problemas geométricos incomuns num ambiente computacional e constatou que a evidência visual exercia um importante papel no processo de solução: (a) a evidência visual, neste caso, é interpretada em termos geométricos e gera questionamentos que são resolvidos pelo significado geométrico; (b) a análise geométrica provoca novas questões que, num primeiro momento, são exploradas empiricamente através dos *softwares*.

Entretanto, os especialistas estão aptos a gerar diversas questões a partir da evidência visual devido ao seu conhecimento prévio do conteúdo.

Passa a ser um problema interessante investigar se os iniciantes conseguem resolver problemas geométricos nos ambientes virtuais e dinâmicos e como a geometria dinâmica pode auxiliar neste processo. Em outras palavras, é de grande relevância investigação sobre se a integração de métodos visuais com métodos geométricos, comuns nos programas de geometria dinâmica, contribui para a aquisição do conhecimento geométrico.

As atividades que estimulam a **exploração** e a **descoberta** dos invariantes são realizadas através de experiências visuais, devido a facilidades já mencionadas, tais como a **precisão** e a **variedade na construção dos objetos geométricos**. Estes atividades possibilitam a formação de noções e conceitos geométricos e levam à representação mental correta destes conceitos por parte do estudante, isto é, acabam auxiliando no processo de visualização.

Para atingir os principais objetivos do ensino da geometria, é necessário que o aluno seja capaz de relacionar os fenômenos visuais aos fatos geométricos, reconhecer visualmente as propriedades geométricas, interpretar os desenhos em termos geométricos e saber realizar construções de configurações geométricas (Laborde, 1998).

Uma aprendizagem alcança tais metas quando capacita o estudante a utilizar o desenho como um auxílio ao seu raciocínio num nível abstrato, selecionando as informações relevantes extraídas de representações visuais e distinguindo as verdadeiras propriedades dos objetos geométricos daquelas encontradas em representações prototípicas ou contingentes. Para Laborde (1998) esta é a base para a elaboração das provas de proposições geométricas em ambientes de geometria dinâmica.

(D) Prova

Inúmeros trabalhos têm se preocupado em relacionar a utilização de *softwares* de geometria dinâmica com a prova de resultados geométricos na aprendizagem e na pesquisa (Mariotti, 1997; Hoyles & Jones, 1998; Gravina, 2000; De Villiers, 2001).

As principais funções da demonstração em matemática são: (a) verificação/convencimento (justificar um resultado), explicação (tornar perceptível a razão pela qual uma proposição é verdadeira), descoberta (dar origem a novos resultados), sistematização (organizar vários resultados num sistema axiomático), meio de comunicação (transmitir o conhecimento matemático), desafio intelectual (auto-realização/gratificação pela construção de uma prova). Em alguns casos há o predomínio de uma função sobre outras e em outros elas se misturam (De Villiers, 2001).

Silva (2002) se concentra nas funções de verificação, explicação e descoberta que parecem trazer maiores implicações para o ensino de matemática no nível fundamental e médio.

O primeiro aspecto apresenta a demonstração como um discurso com poder persuasivo, com a intenção de convencer o interlocutor sobre a veracidade da proposição provada. O segundo traz o significado de demonstração tradicionalmente conferido pela lógica matemática. E finalmente no terceiro aspecto, a demonstração possui uma função heurística, segundo uma perspectiva da epistemologia falibilista de Popper, representada em filosofia da matemática pela dialética de provas e refutações de Lakatos.

Para a demonstração desempenhar satisfatoriamente seu papel retórico é necessário que qualquer pessoa possa efetivamente acompanhá-la em cada um de seus passos e para tanto ela não pode ser infinita. A importância do papel retórico na pesquisa avançada em matemática é evidente, uma vez que o objetivo final de qualquer pesquisador é convencer seus pares sobre a veracidade de suas descobertas. Do mesmo modo, deve ser preocupação de um professor, seja ele de qualquer nível de ensino, o convencimento e a justificativa dos resultados que ela vier apresentar em sala de aula.

O segundo aspecto, o lógico-epistemológico, é o próprio método fornecido pela lógica matemática e usualmente utilizado na pesquisa avançada em matemática. No processo de ensino-aprendizagem, muitos professores acreditam que uma demonstração rigorosa prepare para o domínio do processo dedutivo. Há uma forte crença que quando o aluno acompanha as demonstrações apresentadas pelo professor, ele vai conhecendo algumas estruturas da matemática e, no futuro, acaba desenvolvendo uma autonomia para fazer demonstrações por si mesmo. Esta visão é bastante influenciada pelo formalismo.

Com relação ao papel heurístico, ele só aparecerá numa demonstração, se esta for logicamente falha. Este aspecto é bastante rico tanto para o avanço da pesquisa em matemática, quanto sob o ponto de vista educacional.

A história da matemática registra inúmeros momentos em que matemáticos visionários e insubordinados à ordem estabelecida em sua época, ousaram produzir contra-exemplos de teses demonstradas ou que buscaram estender conceitos envolvidos em uma demonstração para um contexto mais amplo em que aqueles conceitos perdiam a validade. O questionamento do quinto postulado formulado em *Os Elementos* de Euclides levou ao desenvolvimento das geometrias não-euclidianas e as inúmeras tentativas mal-sucedidas ou incompletas de demonstração do último teorema de Fermat levaram a importantes descobertas e até mesmo ao desenvolvimento de novas áreas de pesquisa como a criptografia, por exemplo.

Na educação matemática, a função heurística tem por objetivo levar o aluno a aceitar o desafio de questionar cada passo dado na demonstração, a verificar cada afirmação e a compreender cada resultado. A função retórica, juntamente com a heurística, são normalmente as mais enfatizadas quando se trabalha com a demonstração em informática aplicada à educação.

É importante que o professor sempre incentive seus alunos a conjecturar, a explorar e levantar hipóteses e a refinar as suas crenças e convicções, levando-os a compreender as verdades de proposições matemáticas.

Neste cenário, o computador pode ser um importante aliado e não um obstáculo a mais. Através do manuseio dos *softwares* da geometria dinâmica, o professor pode instigar os alunos a explicarem o porquê da verdade de suas conjecturas, não deixando que as demonstrações fiquem esquecidas e relegadas a segundo plano.

4.3. Limitações

As limitações encontradas nos *softwares* de geometria dinâmica são, muitas vezes, conseqüências da própria tecnologia utilizada e algumas delas podem até mesmo ser exploradas pelo professor em suas aulas.

Quando o usuário desenha retas, semi-retas e segmentos de retas é possível perceber, em alguns momentos, descontinuidade no traçado. Além disso, o professor deve estar sempre atento ao fato de que determinadas medidas obtidas estão sempre sujeitas a erros e aproximações. A precisão das medidas acaba dependendo das limitações da tela, da impressora e de cálculos internos do computador.

Souza (1998) aponta a impossibilidade de medição de ângulos poliédricos e de geração de superfícies esféricas como duas importantes restrições ao uso destes programas na aprendizagem da geometria espacial e esférica, quando esta não ocorre através das representações planas.

Muitas outras limitações poderiam ser mencionadas, porém o importante é que o professor sempre fique atento a elas, não entendendo as soluções encontradas pelo *software* como absolutas e sim como uma rica fonte para novas descobertas e explorações.

5. Considerações Finais

O principal objetivo deste estudo foi refletir sobre as contribuições da introdução de tecnologia informática às aulas de geometria nos níveis de ensino fundamental e médio.

A partir das representações precisas e variadas de objetos geométricos, obtidas com a utilização dos *softwares* de geometria dinâmica, verificou-se a possibilidade de superação de alguns obstáculos rumo ao processo de representação mental destes objetos, base para a formalização de conceitos.

Além disso, a percepção dos invariantes geométricos a partir da exploração proporcionada pelo “arrastar” do *mouse*, permite que o usuário destes programas refine suas crenças e convicções, faça conjecturas e caminhe no sentido de realizar provas de resultados geométricos, unindo os aspectos intuitivo e lógico, fundamentais para a aprendizagem da Geometria; rompendo, assim, a dicotomia predominante até os dias de hoje.

Todas estas reflexões visaram compreender que a utilização do computador como recurso pedagógico nas aulas de geometria pode evitar que o esquecimento desta disciplina persista no cotidiano de nossas escolas, permitindo que ela volte a ocupar o espaço que lhe é devido nas aulas de matemática. Para isto, o seu ensino deve se adequar à realidade educacional, científica e tecnológica de nossos dias.

6. Referências Bibliográficas

- Belfort, E. (2001) “Tabulæ e Mangaba: Geometria Dinâmica”. In: VII ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática. UFRJ. Rio de Janeiro.
- De Villiers, M.D. (2001) “Papel e funções da demonstração no trabalho com o *Sketchpad*”, *Educação e Matemática*, APM, nº 62, pp. 31-36.
- Fischbein, E. (1993) “The Theory of Figural Concepts”, *Educational Studies in Mathematics*, nº 24/2, pp. 139-162.
- Fainguelernt, E. K., *Educação Matemática: Representação e Construção em Geometria*. Porto Alegre: Artmed, 227p., 1998.
- Gravina, M.A. (1996) “Geometria Dinâmica: Uma Nova Abordagem para o Aprendizado da Geometria”. In: VII SBIE – Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, Belo Horizonte (MG), pp. 1-13.
- _____. (2000) “The Proof in Geometry: essays in a dynamical environment”. In: Proof and Proving in Mathematics Education. ICME9 TSG 12. Tóquio/Makuhari.
- Guimarães, L.C. (2001) “Ferramentas Computacionais para o Ensino de Matemática à Distância”. In: VII ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática. UFRJ. Rio de Janeiro (RJ).
- Hoyles, C. , Jones, K. (1998) “Proof in Dynamic Geometry Contexts”. In: MAMMANA, C. (ed.), VILLANI, V.(ed.). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century – An ICMI Study*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic, pp. 121-128.
- Kaleff, A.M.M.R. , *Vendo e Entendendo Poliedros*. Niterói: EdUFF, 209p, 1998.
- Laborde, C. (1998) “Visual Phenomena in the Teaching/Learning of Geometry in a Computer-Based Environment”. In: MAMMANA, C. (ed.), VILLANI, V.(ed.). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century – An ICMI Study*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic, pp. 113-121.
- Lorenzato, S. (1995) “Por que não ensinar Geometria?”, *Educação Matemática em Revista*, SBEM, São Paulo. nº 4 , pp. 3-13.
- Mariotti, M.A. (1997) “Justifying and Proving in Geometry: the mediation of a Microworld”. In: The European Conference on Mathematical Education. Praga: Prometheus, pp. 21-26.
- Souza, F.C.A.G. (1998) “Geometria Dinâmica: um estudo”. Orientadores: Luiz Carlos Guimarães e Paulo Roberto de Oliveira: UFRJ/COPPE, 211p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Sistemas).
- Van Hiele, P., *Structure and Insight*. Orlando: Academic Press, 1986.